

UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE TRILATERAÇÃO

Investigative Proposal for the Teaching and Learning of the Concept of Trilateration

Thaís Mendonça Marques

Fundação Oswaldo Cruz

Artur Batista Vilar

Instituto Federal do Rio de Janeiro

Fundação Oswaldo Cruz

Maria da Conceição de Almeida Barbosa Lima

Fundação Oswaldo Cruz

RESUMO

Este trabalho, de natureza teórica, almeja apresentar uma proposta de atividade a ser desenvolvida com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II sobre o tema localização. Em especial, abordar o método da trilateração utilizado pelo Sistema de Posicionamento Global (GPS). Utilizando o mapa físico ou digital de uma cidade, os estudantes devem localizar, em duas dimensões, um local específico a partir de três distâncias estipuladas pelo(a) docente. Em seguida, são levados a discutir como funcionam os aplicativos de geolocalização, em três dimensões. Esta proposta está pautada no ensino por investigação, o qual estimula o levantamento e teste de hipóteses, a argumentação, o raciocínio lógico e o trabalho em grupo. Além disso, a proposta apresenta um caráter interdisciplinar ao englobar conteúdos referentes às disciplinas de Ciências, em especial, Física, além de Matemática e Geografia. Desse modo, visa-se envolver os estudantes de forma ativa e crítica na construção de conhecimentos.

Palavras-chave: Trilateração; Ensino por investigação; GPS.

ABSTRACT

This theoretical work aims to present a proposal for an activity to be developed with middle school students about the topic location. In particular, it addresses 9th grade students using the trilateration method employed by the Global Positioning System (GPS). Using a physical or online map of a city, students must locate, in two dimensions, a specific location based on three distances stipulated by the teacher. They are then asked to discuss how geolocation applications operate in three dimensions. This proposal is based on the research-based teaching approach, encouraging the formulation and testing of hypotheses, argumentation, logical reasoning, and group work. In addition, it has an interdisciplinary character, encompassing content related to science subjects, especially Physics, as well as Mathematics and Geography. In this way, it aims to actively and critically involve students in the construction of knowledge.

Keywords: Trilateration; Inquiry-based teaching; GPS.

INTRODUÇÃO

Este trabalho, pautado no ensino por investigação, propõe uma atividade a ser desenvolvida com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II sobre localização. A partir de um problema inicial, os alunos são levados a construir conhecimentos sobre o funcionamento de aplicativos de geolocalização baseados no Sistema de Posicionamento Global (GPS). Em geral, essa ferramenta tecnológica é utilizada de forma corriqueira, com receptores disponíveis em aparelhos celulares, computadores, relógios de pulso etc., porém o arcabouço tecnológico assim como as ciências que as embasam, não costumam ser discutidas em sala de aula.

De acordo com Souza e Souza (2022) o ensino de ciências deve propiciar aos alunos uma visão mais ampla ao discutir métodos e papéis sociais. Para isso, é necessário aos professores planejarem atividades que promovam a problematização e a argumentação em todos os segmentos.

A aprendizagem em ciências implica aprender a falar ciências em seu próprio idioma, seja no laboratório ou na vida cotidiana. Falar cientificamente implica em observar, descrever, comparar, classificar, analisar, discutir, criar hipóteses, teorizar, questionar, argumentar, desenvolver experimentos e procedimentos, avaliar, concluir, generalizar, divulgar, escrever e ensinar (Lemke, 1997, p.17, tradução nossa).

No mesmo sentido, Capecchi (2013) defende que o planejamento de atividades pautadas na problematização além de possibilitar o contato dos estudantes com a cultura científica, contribui para o entendimento de que a ciência é uma construção humana.

De acordo com Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018):

[...] a área de Ciências da Natureza, por meio de um olhar articulado de diversos campos do saber, precisa assegurar aos alunos do Ensino Fundamental o acesso à diversidade de conhecimentos científicos produzidos ao longo da história, bem como a aproximação gradativa aos principais processos, práticas e procedimentos da investigação científica (p. 321).

Esse documento dispõe ainda que umas das competências específicas para o Ensino Fundamental é que os alunos possam:

Analisar, compreender e explicar características, fenômenos e processos relativos ao mundo natural, social e tecnológico (incluindo o digital), como também as relações que se estabelecem entre eles, exercitando a curiosidade para fazer perguntas, buscar respostas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das Ciências da Natureza (Brasil, 2018, p. 324).

Outrossim, pontua:

Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica e diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação no desenvolvimento do raciocínio espaço-temporal relacionado a localização,

distância, direção, duração, simultaneidade, sucessão, ritmo e conexão (Brasil, 2018, p. 357).

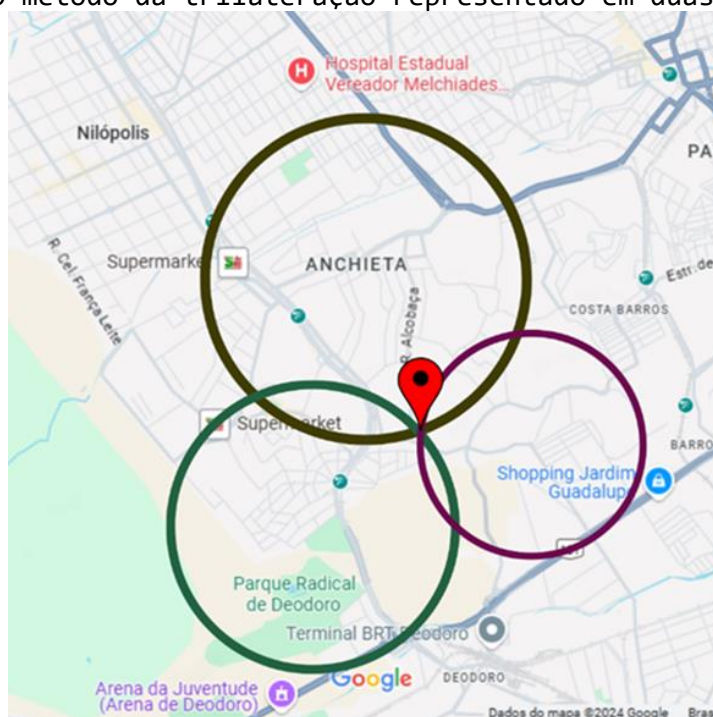
Sobre o tema localização - método da trilateração

Com fins de sobrevivência, exploração de territórios, determinação de rotas, a humanidade tem necessidade de se localizar desde tempos longínquos e as tecnologias de localização foram sendo aperfeiçoadas. Dentre elas, podemos citar os astros, a bússola e o Sistema de Posicionamento Global (GPS). Criado inicialmente para fins militares americanos na década de 1970, atualmente o GPS é o sistema de localização geográfica mais utilizado. Oferece, por exemplo, possibilidades de locomoção, por meio de aplicativos e serviços que disponibilizam em tempo real a posição e/ou deslocamento do usuário (Brum *et al.*, 2024).

Basicamente, o sistema trabalha transferindo informações, através de ondas eletromagnéticas, entre satélites artificiais e aparelhos receptores localizados em terra, e necessita de precisão temporal da ordem de bilionésimos de segundo proporcionada por relógios atômicos, sendo assim um ótimo representante funcional da mecânica quântica e da teoria da relatividade (Zanotta; Cappelletto; Matsuoka, 2011).

Geometricamente, o sistema recorre a um método denominado trilateração, o qual tem a premissa de conhecer três posições fixas e a distância em que cada uma está em relação a um mesmo ponto, cuja posição é desconhecida e queira se determinar (Brum *et al.*, 2024). A figura 01 ilustra um exemplo desse método, em duas dimensões, utilizando o aplicativo *Google Maps*.

Figura 01 – O método da trilateração representado em duas dimensões

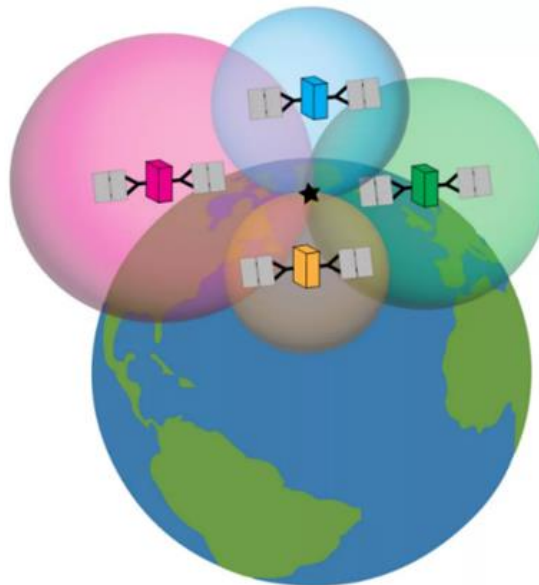


Fonte: Os autores (2025).

As circunferências em verde, dourado e lilás abrangem as áreas de cobertura de cada uma das três posições fixas (conhecidas) e o símbolo, em vermelho, a localização, que resulta da área de intersecção entre as circunferências.

Já no aspecto tridimensional, o GPS trabalha com áreas de cobertura esféricas, coordenadas esféricas. Logo, de acordo com o teorema proposto pela geometria, se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto (figura 02). Sendo assim, o receptor GPS utiliza informações de quatro satélites para determinar sua posição – latitude, longitude e altitude. Ademais, as informações do quarto satélite permitem verificar se há um real sincronismo entre todos os relógios do sistema (Marino, 2017).

Figura 02 – O método da trilateração representado em três dimensões



Fonte: Lavionnaire (2017).

REFERENCIAL TEÓRICO

A proposta da atividade investigativa, a ser descrita na próxima seção, pauta-se no referencial do ensino por investigação.

Definimos como ensino por investigação o ensino dos conteúdos programáticos em que o professor cria condições em sua sala de aula para os alunos: pensarem, levando em conta a estrutura do conhecimento; falarem, evidenciando seus argumentos e conhecimentos construídos; lerem, entendendo criticamente o conteúdo lido; escreverem, mostrando autoria e clareza nas ideias expostas. Em consequência disso, quando avaliamos o ensino que propomos, não buscamos verificar somente se os alunos aprenderam os conteúdos programáticos, mas se eles sabem falar, argumentar, ler e escrever sobre esse conteúdo (Carvalho, 2018, p. 766).

Ressaltamos neste ponto que apesar de uma atividade investigativa ser influenciada pelas ações de um trabalho científico, essa não tem o propósito de imitar esse trabalho, ou seja, não objetivamos criar “mini cientistas” (Zytkuewicz; Bego, 2023), mas sim, oportunizar aos alunos a liberdade para elaborar hipóteses e construir análises críticas, aspectos fundamentais tanto na ciência quanto na sociedade (Lino; Sasseron, 2024).

Desse modo, o ensino por investigação estabelece uma relação entre o conhecimento prévio do aluno e o conhecimento científico, tornando os estudantes agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem. Porém, para que isso ocorra, Barbosa Lima e Vianna (2021) apontam que o(a) docente deve propor boas perguntas, de resoluções factíveis, que sejam geradoras de debate e argumentação.

METODOLOGIA

O planejamento da atividade foi dividido em duas aulas, as quais compõem uma sequência de ensino investigativo (SEI). De acordo com Carvalho (2011) alguns pontos devem ser considerados no planejamento: a relevância de um problema para o início da construção do conhecimento; a passagem da ação manipulativa para a ação intelectual, a importância da tomada de consciência dos próprios atos para a construção do conhecimento, as diferentes etapas das explicações científicas e as interações estabelecidas.

Além disso, os problemas nas SEI's devem fazer parte da cultura dos estudantes e serem estimulantes para a busca de uma solução. Podem ser classificados em experimentais - laboratório aberto e demonstração investigativa - e não experimentais - questões abertas introduzidas por textos, imagens, reportagens etc. (Carvalho, 2011).

Neste trabalho, a pergunta de investigação será introduzida a partir da leitura de um texto de divulgação científica publicado por Beto Pimentel, em 2011, na Revista Ciência Hoje das Crianças. A revista e o texto foram escolhidos com base no tema e na acessibilidade de linguagem para o nível de ensino estipulado.

Os conteúdos abordados compreendem o método da trilateração, leitura de mapas, sistema de coordenadas, escalas e o estudo de circunferências (duas dimensões) e esferas (três dimensões).

Para o desenvolvimento da atividade é sugerido aos docentes disponibilizar materiais de fácil acesso, que podem ser adaptados (sugestões serão apresentadas na próxima seção). Ademais, ressalta-se que, pelos conteúdos abrangentes, as aulas podem ser desenvolvidas em parceria com professores de Física, Geografia e Matemática, em caráter interdisciplinar. Quanto à avaliação propõe-se que seja formativa, em caráter dialógico, a fim de que docentes e discentes reflitam durante todo o processo sobre os desafios e avanços alcançados, assim como possíveis necessidades de mudanças nas práticas pedagógicas.

PROPOSTA DA ATIVIDADE

Na aula 1, o(a) docente deve propor a divisão da turma em grupos e discutir quais conhecimentos prévios os alunos possuem a respeito do tema (localização).

Em seguida, convidá-los a realizar a leitura do texto Como chegar lá sem se perder¹ (Pimentel, 2011). No texto, Pimentel aborda aspectos históricos sobre os instrumentos de localização e o funcionamento do GPS. Enfatiza-se neste ponto que a fim de não dispor explicitamente o tema, visto que estes conhecimentos devem ser construídos pelos alunos durante a SEI, cabe realizar uma versão adaptada. No quadro 01 desenvolvemos uma possível versão a ser apresentada durante a atividade.

Quadro 01 - Texto-base para a atividade

Durante milênios os seres humanos viajaram de um lugar a outro usando marcos geográficos (montanhas, rios etc.), o Sol e as estrelas para se orientar, isto é, para confirmar se estavam indo na direção certa. Isto podia ser feito porque a partir do movimento do Sol ou da distribuição das estrelas é possível determinar em qual direção está o Norte (ou o Sul), e, a partir daí, ir para qualquer outra direção que faça um ângulo com ela. No entanto, nem sempre fazer isso era uma coisa fácil. Por exemplo, o céu podia estar nublado por muito tempo, dificultando ver as estrelas ou mesmo a posição exata do Sol. Por isso não era muito fácil navegar no mar longe do litoral, porque o barco podia facilmente se perder e ir parar muito longe [...] a invenção da bússola foi o que mudou isso. Apesar de ter sido melhorada na Itália no século 13, a ideia da bússola deve ter sido inicialmente desenvolvida mais de cem anos antes na China, onde já se sabia que um tipo de mineral (que hoje chamamos magnetita) podia atrair pedaços de ferro. Além disso, estes “magnetos” (ou ímãs, como são mais conhecidos) mostravam outras curiosas propriedades: eles podiam se atrair ou se repelir uns aos outros, dependendo de qual lado (ou polo) fosse aproximado do outro ímã. Se tivessem um formato alongado, fossem leves o suficiente e colocados sobre um apoio que permitisse que girassem, eles se posicionavam sempre de forma a apontar na direção Norte-Sul [...] hoje em dia praticamente todos aviões e navios que cruzam os oceanos de um lado para o outro do mundo têm um equipamento que permite ao piloto saber sua localização no mapa a qualquer instante. Esse equipamento conecta-se por meio de uma antena a diversos satélites em órbita da Terra, e a partir daí calcula a sua própria posição. Mas, mesmo dispondo dessas comodidades, todos os bons navegadores e pilotos precisam aprender a se orientar. Afinal de contas, vai que o aparelhinho quebra ou fica sem bateria no meio do caminho?

Fonte: Pimentel (2011, adaptado pelos autores).

A partir da leitura do texto e da última pergunta apresentada por Pimentel, é proposta a seguinte atividade direcionada aos estudantes:

¹ <https://chc.org.br/coluna/como-chegar-la-sem-se-perder/>

Um estudante do 9º ano resolveu passear pela cidade do Rio de Janeiro. Porém, durante o trajeto o celular descarregou. "Nossa! Como vou me localizar agora?" – pensou o rapaz. No caminho, encontrou uma estação de trem que dispunha o mapa da cidade. Ao analisá-lo, percebeu que estava a 3 km do início do bairro de Vila Isabel, 2 km do Museu Nacional e 2 km do início da Rua São Francisco Xavier. Com base nessas informações, como você o localizaria?

Desse modo, os grupos devem ser estimulados a debaterem entre si e criarem hipóteses. Espera-se que uma dessas hipóteses seja a necessidade de utilização do mapa local mencionado.

Então, o(a) docente a fim de oportunizar o teste de hipóteses, deve apresentar o mapa físico ou digital, com escala, da região considerada. Além disso, materiais como argolas de diferentes diâmetros, pedaços de barbante para formação de circunferências, varetas para auxiliar a marcação de possíveis localizações, régua e compasso, caso o mapa seja físico (figura 03) ou dispor aos grupos sugestões de aplicativos de leitura e desenho para que possam explorar o mapa digital.

Figura 03 – O método da trilateração representado em três dimensões.



Fonte: Os autores (2025).

Por raciocínio lógico, é esperado que durante a atividade, com base nas três referências dadas, os grupos criem círculos com os raios estipulados e, ao estabelecer uma intersecção visual, alcancem a resolução do problema pelo método da trilateração, mesmo que de antemão não conheçam formalmente esse conceito. Por fim, os grupos são convidados a justificar e compartilhar com os demais as soluções encontradas.

Já na aula 2, a partir das discussões levantadas pela atividade 1, o(a) docente deve solicitar que os grupos considerem que o sinal de celular do estudante foi restabelecido. Sendo assim, em nosso mundo tridimensional, questioná-los como os aplicativos de localização funcionam (pergunta central de investigação). O objetivo desta pergunta é levar os grupos a transporem o problema de duas para três dimensões, no âmbito que ao invés de circunferências são utilizadas esferas. Para alcançar este ponto, espera-se que os grupos recorram e debatam o seguinte trecho do texto de Pimentel (2011):

[...] hoje em dia praticamente todos aviões e navios que cruzam os oceanos de um lado para o outro do mundo têm um equipamento que permite ao piloto saber sua localização no mapa a qualquer instante. Esse equipamento conecta-se por meio de uma antena a diversos satélites em órbita da Terra, e a partir daí calcula a sua própria posição.

Por meio da argumentação, é possível que os estudantes estabeleçam uma relação entre os receptores e satélites GPS com o método da trilateração, visto durante a primeira atividade.

Por fim, estimulamos os(as) docentes apresentarem à turma uma simulação computacional ou uma imagem em três dimensões de quatro esferas, tal como disposta na figura 2 deste artigo, a fim de que os grupos construam/desenhem pontos de intersecção e discutam entre si a necessidade de se utilizar no mínimo quatro satélites GPS para que os aplicativos possam localizar um ponto sobre a superfície da Terra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta proposta, de caráter investigativo, aborda o método da trilateração, em duas e três dimensões, em aulas de Ciências voltadas ao público do 9º ano do Ensino Fundamental II. Por meio de materiais de fácil acesso, o(a) docente é capaz de oportunizar aos alunos testarem hipóteses, argumentarem e construir explicações relacionadas ao funcionamento dos aplicativos de geolocalização por meio de uma sequência de ensino investigativo (SEI) com base no referencial do ensino por investigação.

Cabe ressaltar que os materiais propostos, assim como o texto-base, são adaptáveis ao contexto social dos alunos, devendo ser substituídos pelo mapa físico ou digital da cidade em que esses vivem e/ou estudam.

Além disso, a área de Ciências da Natureza, em especial, Física, pode ser trabalhada junto a conteúdos de Matemática e Geografia, dentre eles escalas, sistemas de coordenadas, intersecções de circunferências e esferas, além de aspectos históricos sobre instrumentos de localização. Ademais, o tema propicia suscitar debates relacionados à tríade ciência, tecnologia e sociedade.

Portanto, esta proposta visa trazer contribuições à área de ensino, com potencial de oportunizar aos estudantes o desenvolvimento de diversas competências e habilidades próprias do fazer e pensar

científicos, da criatividade, do diálogo, do raciocínio lógico, do trabalho em equipe e do pensamento crítico.

REFERÊNCIAS

BARBOSA LIMA, Maria da Conceição de Almeida; VIANNA, Deise Miranda. Práticas de professores com abordagens investigativas. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, v. 16, n. 1, 2021. Disponível em: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/GDLA/article/view/15579/16658>. Acesso em: 15 nov. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. 2018. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 08 out. 2024.

BRUM, Valéria de Fátima Maciel Cardoso; HAUENSTEIN, Clovis Adilson; BORGES, Igor Godoy; YASSAKI FILHO, Julius Kahoru. Tecnologias digitais: a matemática utilizada no funcionamento do Global Positioning System (GPS). **Revista Caderno Pedagógico**, Curitiba, v.21, n.4, p. 01-23. 2024. Disponível em: <https://ojs.studiespublicacoes.com.br/ojs/index.php/cadped/article/view/3543/2649>. Acesso em: 21 ago. 2025.

CAPECCHI, Maria Candida Varone de Moraes. Problematização no Ensino de Ciências. In: CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. (org.). **Ensino de Ciências por investigação**. Cengage Learning. São Paulo. 2013.

CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. Ensino e aprendizagem de Ciências: referenciais teóricos e dados empíricos das sequências de ensino investigativas (SEI). In: LONGHINI, M. D. (Org.). **O uno e o Diverso na Educação**. Uberlândia: EDUFU, 2011. cap. 18, p. 253-266.

CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino por Investigação. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**. RBPEC 18(3), 765-794. Dezembro, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4852/3040>. Acesso em: 08 out. 2024.

LAVIONNAIRE. **Système de positionnement par satellites**. Disponível em: <https://www.lavionnaire.fr/InstNavigGPS.php>. Acesso em: 15 nov. 2024.

LEMKE, Jay. **Aprender a hablar ciencia**. Ediciones Paidós Ibérica S.A. Espanha. 1997.

LINO, Natan Trovó; SASSERON, Lúcia Helana. Argumentação em sala de aula e sua relação com os domínios do conhecimento científico. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 41, n. 1, p. 8-35, abr. 2024. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/94798/55675>. Acesso em: 21 ago. 2025.

MARINO, Tiago. O que é o GPS? 2017. Departamento de Geociências - Instituto de Agronomia - UFRRJ. **Notas de aula**. Disponível em:

<https://tiagomarino.com/classes/EXTRAS/material/3%20-%20Como%20Funciona%20o%20GPS.pdf>. Acesso em: 03 out. 2024.

PIMENTEL, Beto. Como chegar lá sem se perder. **Revista Ciência Hoje das Crianças**. Instituto Ciência Hoje. Coluna 24 fev. 2011. Disponível em: <https://chc.org.br/coluna/como-chegar-la-sem-se-perder/>. Acesso em: 03 jan. 2025.

SASSERON, Lucia Helena; MACHADO, Vitor Fabricio. **Alfabetização científica na prática: inovando a forma de ensinar física**. São Paulo: Livraria da Física. 2017.

SOUZA, Cassiana dos Santos; SOUZA, Fernando de Jesus. Atividades investigativas no ensino de Ciências: uma análise da produção acadêmica nacional. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 22, nº 45, 6 dez. 2022. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/45/atividades-investigativas-no-ensino-de-ciencias-uma-analise-da-producao-academica-nacional>. Acesso em: 3 jan. 2025.

ZANOTTA, Daniel Capella; CAPPELLETTO, Eliane; MATSUOKA, Marcelo Tomio. O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 2, 2313, 2011. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v33n2/a14v33n2.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2024.

ZYTKUEWISZ, Matheus Almeida Bauer; BEGO, Amadeu Moura. O que é o Ensino por Investigação, afinal? **Educação Química em Ponto de Vista**, [S. l.], v. 7. 2023. Disponível em: <https://revistas.unila.edu.br/epqv/article/view/3306>. Acesso em: 3 jan. 2025.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Contato dos autores/as:

autora: Thaís Mendonça Marques
e-mail: thaismmarques13@gmail.com

autor: Artur Batista Vilar
e-mail: artur.vilar@ifrj.edu.br

autora: Maria da Conceição de Almeida Barbosa Lima
e-mail: mcablina@uol.com.br

Manuscrito aprovado para publicação em: 04/03/2026.